

Construction des quaternions

$\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^+ \cdot SO(2)$, $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{C} \cdot i$

$\mathbb{H}^* = \mathbb{R}^+ \cdot SO(3)$, $\mathbb{H} = \mathbb{H}^* \cup \{0\}$

$SO(3) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \alpha^2 + \beta^2 = 1 \right\} \cong S^3$

Alors $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \right\}$

\mathbb{R} algèbre de dimension 4, de base

$1 = \mathbb{I}_2$, $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On note $\mathbb{R} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1)$
 $\mathbb{H} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1, i, j, k)$

donc, si $h \in \mathbb{H}$ est représenté par Π .

$h = x + iy + jz + kt$
 $\bar{h} = x - iy - jz - kt \stackrel{\Delta}{=} \Pi^*$

$N(h) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = h\bar{h} \stackrel{\Delta}{=} \det(\Pi)$

Alors \cdot est linéaire et multiplicative
 $\star N$ est multiplicative.

Fact \mathbb{H}^* est un corps :
Si $h \neq 0$, $h^{-1} = \frac{\bar{h}}{N(h)}$

donne $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$

Remarquons que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

On a $\mathbb{R} \subset Z(\mathbb{H})$. On a $i^2 = -1$, $i \cdot h = h \cdot i$

$h = x + iy + jz + kt$
 $i \cdot h = xi - y + jz + it$
 $i \cdot h = xi - y + jz + it$

car $y = k = -j$

donc $z = 0$ de même $t = 0$ car au j.
 $y = 0$ \square

Prop $SO(2) / \{ \pm \mathbb{I}_2 \} \cong SO(3)$

Soit $h, h' \in \mathbb{H}$, posons
 $\langle h, h' \rangle = \frac{h \bar{h}' + h' \bar{h}}{2}$

produit scalaire associé à la norme N . Alors
 $(1, i, j, k)$ est orthogonale.

On fait agir $SO(2)$ sur \mathbb{H} .

$(h, \cdot) \mapsto \varphi_h(\cdot) = h \cdot h^{-1}$

donc $\varphi : SO(2) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{H})$
 $h \mapsto \varphi_h$

Fact φ_h préserve la norme.

$N(h \cdot h^{-1}) = N(h)N(h^{-1}) = N(h)$

donc φ_h est un automorphisme orthogonal.

De plus, \mathbb{R}^* étant central dans \mathbb{H} ,
 φ_h préserve \mathbb{R} , donc préserve
 $\mathbb{R}^+ = \mathbb{I}$.

Ainsi, on a

$\varphi : SO(2) \rightarrow O(\mathbb{H}) \cong O_4(\mathbb{R})$
 $h \mapsto \varphi_h$ injectif continu.

D'autre part, φ est \mathcal{C}^∞

$SO(2) \cong S^1$ est connexe,

donc $\varphi(SO(2))$ est connexe et contient \mathbb{I}_2 .

Donc $\subseteq SO(3)$, d'où

$\varphi : SO(2) \rightarrow SO(3)$
 $h \mapsto \varphi_h$

Rest ① φ est surjective -
② $\ker(\varphi) = \{ \pm \mathbb{I}_2 \}$

① $SO(3)$ est engendré par les rotations
Si $\alpha \neq 0$ est un tel,
d'une $\mathbb{R}h$ avec $h \in SO(2) \cap \mathbb{H}$, montrons
qu'il y a $\varphi_h = \alpha$.

(a) $\varphi_h(h) = h$

(b) $\langle \varphi_h(h), \varphi_h(h) \rangle = 0$, $\varphi_h(h) = -h$

En effet

(a) $\varphi_h(h) = h \cdot h^{-1} = h$

(b) $\varphi_h(h) = h \cdot h^{-1} = -h$
 $= h \cdot h^{-1}$ car $h \in SO(2) \cap \mathbb{H}$

$= -h \cdot h^{-1}$

$= -h \cdot h^{-1}$ car $h \in \mathbb{H}$

$= -h$ car $h \in SO(2) \cap \mathbb{H}$

② $\{ \pm \mathbb{I}_2 \} \subseteq \ker(\varphi)$
Si montrant $\varphi(h) = id = \varphi_h$,
à $h \in SO(2)$,

h commute à \mathbb{H} et \mathbb{R} est central dans
 $h \in Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$, d'où $h \in \mathbb{R} \cap SO(2) = \{ \pm \mathbb{I}_2 \}$.

Par le th 1.50, on a donc

$\varphi : SO(2) / \{ \pm \mathbb{I}_2 \} \cong SO(3)$

Prop. On peut justifier que φ est \mathcal{C}^∞ ,
et comme $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, on a

$\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Construction des quaternions

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^* \times SO(2), \quad \mathbb{C} = \mathbb{R}^* \cup \{0\}$$

$$\mathbb{H}^* = \mathbb{R}^* \times SU(2), \quad \mathbb{H} = \mathbb{H}^* \cup \{0\}$$

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \cong S^1$$

$$\text{Alors } \mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \right\}$$

\mathbb{R} -algèbre de dimension 4, de base

$$1 = I_2, \quad i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

On note: $\mathbb{R} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1)$
 $\mathbb{H} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1, j, k)$

Alors, si $h \in \mathbb{H}$ est représenté par Π :

$$= x + iy + jz + kt$$

$$\overline{h} = x - iy - jz - kt \hat{=} \Pi^*$$

$$N(h) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = h\overline{h} \hat{=} \det(\Pi)$$

Alors $*$ est linéaire et multiplicative
 N est multiplicative.

Fact \mathbb{H} est un corps:
 Si $h \neq 0, h^{-1} = \frac{\overline{h}}{N(h)}$

donc $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$

Remarquons que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

On a $\mathbb{R} \subset Z(\mathbb{H})$. Recip $\frac{1}{N(h)} \cdot h \in Z(\mathbb{H})$

$$hi = xi - y + jz + kt$$

$$= ih = xi - y + jz + kt$$

$$\text{donc } ij = k = -ji$$

$$\text{donc } z=0, \text{ de même } t=0 \text{ que } au \text{ } j.$$

Prop $SU(2) / \{I, -I\} \cong SO(3)$

Si $h, h' \in \mathbb{H}$, posons:
 $\langle h, h' \rangle = \frac{h\overline{h'} + h'\overline{h}}{2}$

produit scalaire associé à la norme N . Alors
 $(1, i, j, k)$ est orthogonale.

On fait agir $SU(2)$ sur \mathbb{H} .

$$(h, u) \rightarrow \varphi_h(u) = h u h^{-1}$$

$$\text{donc } \varphi: SU(2) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{H})$$

$$h \mapsto \varphi_h$$

Fact φ_h préserve la norme.

$$N(h u h^{-1}) = N(h) N(u) N(h^{-1}) = N(u)$$

donc φ_h est un automorphisme orthogonal.

De plus, \mathbb{R} étant
 φ_h préserve

Alors, on a
 $\varphi: SU(2) \rightarrow$
 $h \mapsto$

D'autre part, φ est
 $\varphi: SU(2) \rightarrow$

donc $\varphi(SU(2))$ est
 dense $\subseteq SO(3)$

$\varphi: SU(2) \rightarrow$
 $h \mapsto$

(3)

De plus, \mathbb{R} étant central dans \mathbb{H} ,
 φ h première \mathbb{R} , donc première
 $\mathbb{R}^\perp = \mathbb{H}$.

Ainsi, on a

$$\varphi: \text{SO}(2) \rightarrow \text{O}(\mathbb{H}) \cong \text{O}_3(\mathbb{R})$$

$h \mapsto \varphi_h$ restreint à $\text{SO}(2)$

D'autre part, φ est ∞
 $\text{SO}(2) \cong S^1$ est connexe,
donc $\varphi(\text{SO}(2))$ est connexe et contient I_2 .
Donc $\subseteq \text{SO}(3)$, donc :

$$\varphi: \text{SO}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$$

$h \mapsto \varphi_h$

N. Alors

uh¹

$A_{\mathbb{H}}(\mathbb{H})$

φ_h

(h')

orthogonal

But (1) φ est surjective -
(2) $\text{ker}(\varphi) = \{\pm I_2\}$ -

(1) $\text{SO}(2)$ est engendré par les
retournements $S_{\mathbb{R}^\perp}$ et π ,
d'où $\mathbb{R}h$ avec $h \in \text{SO}(2) \cap \mathbb{H}$. Montrons
que $\varphi_h = \pi$.

- (α) $\varphi_h(h) = h$
- (β) $\langle h, h' \rangle = 0, \varphi_h(h') = -h'$

En effet :

- (α) $\varphi_h(h) = h h h^{-1} = h$
- (β) $\varphi_h(h') = h h' h^{-1}$
 $= h h' h$ car $h \in \text{SO}(2) \cap \mathbb{H}$
 $= -h h h'$
 $= -h^2 h'$ car $h' \in \mathbb{H}$
 $= -h'$ car $h \in \text{SO}(2) \cap \mathbb{H}$

(2) $\{\pm I_2\} \subseteq \text{ker}(\varphi)$
Si maintenant $\varphi(h) = \text{id} = \varphi_h$,
où $h \in \text{SO}(2)$,
 h commute à \mathbb{H} et \mathbb{R} est central dans
 $h \in \mathbb{Z}(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$, donc $h \in \mathbb{R} \cap \text{SO}(2)$
 $= \{\pm I_2\}$.

Par le 4th TISO, on a donc :

$$\varphi: \text{SO}(2) / \{\pm I_2\} \cong \text{SO}(3)$$

Pq. On peut justifier que φ est ∞ ,
et comme $\pi_1(S^1) = 0$, on a :

$$\pi_1(\text{SO}(3)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

OFF
ON