Construction des quaternions

$\mathbb{C}^* = \mathbb{R}_+^* SO(2)$, $\mathbb{C} = \mathbb{C}^* \cup \{0\}$

$\mathbb{H}^* = \mathbb{R}_+^* SU(2)$, $\mathbb{H} = \mathbb{H}^* \cup \{0\}$

$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \bar\beta \\ -\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}),\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$
$\simeq S^3$

Alors $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \bar\beta \\ -\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \right\}$

$\mathbb{R}$-algèbre de dimension 4, de base

$1 = I_2$, $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

On note $\mathbb{R} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1)$
$\mathbb{I} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(i, j, k)$

Donc, si $h \in \mathbb{H}$ est représenté par M.
$= x + iy + jz + kt$

$\bar h = x - iy - jz - kt \hat{=} M^*$

$N(h) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = h\bar h \hat{=} \det(M)$.

Alors • $\bar{\ }$ est linéaire et multiplicative
• N est multiplicative.

Fait $\mathbb{H}$ est un corps : si $h \neq 0$, $h^{-1} = \dfrac{\bar h}{N(h)}$

Lemme $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$.

Remarquons que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

On a $\mathbb{R} \subseteq Z(\mathbb{H})$. Réciproquement, si $h \in Z(\mathbb{H})$

$hi = xi - y + jiz + kit$
$= ih = xi - y + ijz + ikt$

Or $ij = k = -ji$.
d'où $z = 0$, de même $t = 0$ pour avec j.
$y = 0$

$\square$

Prop $\underline{SU(2)/\{\pm I_2\} \simeq SO(3)}$

Si $h, h' \in \mathbb{H}$, posons :
$\langle h, h' \rangle = \dfrac{h\bar{h'} + h'\bar h}{2}$

produit scalaire associé à la norme N. Alors $(1, i, j, k)$ est orthonormée.

On fait agir $SU(2)$ sur $\mathbb{H}$.
$(h, u) \longmapsto \varphi_h(u) = huh^{-1}$.

d'où $\varphi : SU(2) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$
$h \longmapsto \varphi_h$.

Fait φ_h préserve la norme.
$N(huh^{-1}) = N(h)N(u)N(h^{-1})$
$= N(u)$,

donc φ_h est un automorphisme orthogonal.

De plus, $\mathbb{R}$ étant central dans $\mathbb{H}$, φ_h préserve $\mathbb{R}$, donc préserve $\mathbb{R}^\perp = \mathbb{I}$.

Ainsi, on a
$\varphi : SU(2) \longrightarrow O(\mathbb{I}) \simeq O_3(\mathbb{R})$
$h \longmapsto \varphi_h$ restreint convenablement.

D'autre part, φ est C^0
$SU(2) \simeq S^3$ est connexe,

donc $\varphi(SU(2))$ est connexe et contient I_2.
Donc $\subseteq SO(3)$, d'où

$\varphi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$
$h \longmapsto \varphi_h$.

But (1) φ est surjective.
(2) $\ker(\varphi) = \{\pm I_2\}$.

(1) $SO(3)$ est engendré par les retournements. Soit r un tel, d'axe $\mathbb{R}h$ avec $h \in SU(2) \cap \mathbb{I}$. Montrons que $\varphi_h = r$.

(α) $\varphi_h(h) = h$
(β) si $\langle h, h' \rangle = 0$, $\varphi_h(h') = -h'$.

En effet
(α) $\varphi_h(h) = hhh^{-1} = h$.
(β) $\varphi_h(h') = hh'h^{-1}$
$= hh'\bar h$ car $h \in SU(2) \cap \mathbb{I}$
$= -hh\bar{h'}$
$= h^2 h'$ car $h' \in \mathbb{I}$
$= -h'$ car $h \in SU(2) \cap \mathbb{I}$.

(2) $\{\pm I_2\} \subseteq \ker(\varphi)$
Si maintenant $\varphi(h) = \mathrm{id} = \varphi_h$,
où $h \in SU(2)$,

h commute à $\mathbb{I}$ et $\mathbb{R}$ est central dans $\mathbb{H}$, donc $h \in Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$, d'où $h \in \mathbb{R} \cap SU(2)$
$= \{\pm I_2\}$.

Par le 1er TISO, on a donc :

$$\boxed{\tilde\varphi : SU(2)/\{\pm I_2\} \simeq SO(3)}.$$

Rq. On peut justifier que $\tilde\varphi$ est C^0, et comme $\pi_1(S^3) = 0$, on a :

$\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Construction des quaternions

$\mathbb{C}^* = \mathbb{R}_+^* \, SO(2)$, $\mathbb{C} = \mathbb{C}^* \cup \{0\}$

$\mathbb{H}^* = \mathbb{R}_+^* \, SU(2)$, $\mathbb{H} = \mathbb{H}^* \cup \{0\}$

$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \overline{\beta} \\ -\beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}), |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$
$\simeq S^3$

Alors $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \overline{\beta} \\ -\beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \right\}$

$\mathbb{R}$-algèbre de dimension 4, de base

$1 = I_2$, $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

On note : $\mathbb{R} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1)$
$\mathbb{I} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(i, j, k)$.

Ainsi, si $h \in \mathbb{H}$ est représenté par M :
$= x + iy + jz + kt$

$\begin{cases} \overline{h} = x - iy - jz - kt \hat{=} M^* \\ N(h) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = h\overline{h} \hat{=} \det(M). \end{cases}$

Alors * $\overline{}$ est linéaire et multiplicative
* N est multiplicative.

Fait $\mathbb{H}$ est un corps :
Si $h \neq 0$, $h^{-1} = \dfrac{\overline{h}}{N(h)}$

Lemme $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$.

Remarquons que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

On a $\mathbb{R} \subseteq Z(\mathbb{H})$. Réciproquement, si $h \in Z(\mathbb{H})$

$hi = xi - y + jiz + kit$
$= ih = xi - y + ijz + ikt$

mais $ij = k = -ji$
d'où $z = 0$, de même $t = 0$; avec j, $y = 0$.

$\square$

Prop $SU(2)/\{\pm I_2\} \simeq SO(3)$

Si $h, h' \in \mathbb{H}$, posons :
$\langle h, h' \rangle = \dfrac{h\overline{h'} + h'\overline{h}}{2}$

produit scalaire associé à la norme N. Alors $(1, i, j, k)$ est orthonormée.

On fait agir $SU(2)$ sur $\mathbb{H}$.
$(h, u) \longrightarrow \varphi_h(u) = huh^{-1}$

d'où : $\varphi : SU(2) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$
$h \longmapsto \varphi_h$.

Fait φ_h préserve la norme.
$N(huh^{-1}) = N(h)N(u)N(h^{-1})$
$= N(u)$,

donc φ_h est un automorphisme orthogonal.

De plus, $\mathbb{R}$ étant
φ_h préserve

Ainsi, on a
$\varphi : SU(2) \longrightarrow$
$h \longmapsto$

D'autre part, $\begin{cases} \varphi \text{ est} \\ SU \end{cases}$

donc $\varphi(SU(2))$ est

Donc $\subseteq SO(3)$

$\varphi : SU(2)$
h

De plus, $\mathbb{R}$ étant central dans $\mathbb{H}$, φ_h préserve $\mathbb{R}$, donc préserve $\mathbb{R}^\perp = \mathbb{I}$.

Ainsi, on a

$$\varphi : SU(2) \longrightarrow O(\mathbb{I}) \simeq O_3(\mathbb{R})$$
$$h \longmapsto \varphi_h \text{ restreint contracté.}$$

D'autre part, $\begin{cases} \varphi \text{ est } C^0 \\ SU(2) \simeq S^3 \text{ est connexe,} \end{cases}$

donc $\varphi(SU(2))$ est connexe et contient I_2.

Donc $\subseteq SO(3)$, d'où :

$$\varphi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$$
$$h \longmapsto \varphi_h.$$

<u>But</u> (1) φ est surjective.

(2) $\ker(\varphi) = \{\pm I_2\}$.

---

(1) $SO(3)$ est engendré par les retournements. Soit r un tel, d'axe $\mathbb{R}h$ avec $h \in SU(2) \cap \mathbb{I}$. Montrons que $\varphi_h = r$.

(α) $\varphi_h(h) = h$

(β) Si $\langle h, h' \rangle = 0$, $\varphi_h(h') = -h'$.

En effet

(α) $\varphi_h(h) = hhh^{-1} = h$.

(β) $\varphi_h(h') = hh'h^{-1}$
$= hh'\bar{h}$ car $h \in SU(2) \cap \mathbb{I}$
$= -hh\bar{h'}$
$= h^2h'$ car $h' \in \mathbb{I}$
$= -h'$ car $h \in SU(2) \cap \mathbb{I}$.

(2) $\{\pm I_2\} \subseteq \ker(\varphi)$.

Si maintenant $\varphi(h) = id = \varphi_h$, où $h \in SU(2)$,

h commute à $\mathbb{I}$ et $\mathbb{R}$ est central dans $\mathbb{H}$, $h \in Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$, d'où $h \in \mathbb{R} \cap SU(2) = \{\pm I_2\}$.

Par le 1er TISO, on a donc :

$$\boxed{\tilde{\varphi} : SU(2)/\{\pm I_2\} \simeq SO(3)}.$$

Rq. On peut justifier que $\tilde{\varphi}$ est C^0, et comme $\pi_1(S^3) = 0$, on a :

$$\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$